الحل النموذجي لمقياس الاقتصاد القياسي المعمق:

حل التمرين الأول:

1/ ايجاد مقدرات المعلمات α، β باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية

* تعتمد طريقة المربعات الصغرى على تصغير مجموع مربعات البواقي إلى أدنى قيمة ممكنة حيث نكتب: (01)

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2$$

ولتصغير Q نقوم باشتقاقها جزئيا بالنسبة للقيمتين $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ على التوالي، ثم نساوي نتيجة ذلك للصفر أي:

$$\text{Min } Q = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0$$

حساب مقدر α:

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \Rightarrow 2(-1)\sum(y_i - \alpha - \hat{\beta} x_i) = 0$$

$$\sum y_i - n\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i - \hat{\beta}\sum x_i = n\hat{\alpha}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\sum y_i - \hat{\beta}\sum x_i}{n}$$

$$\boxed{\alpha = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}} \quad (02) \quad \text{---} \quad (1)$$

حساب مقدر β:

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow 2\sum(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)x_i = 0$$

$$\sum y_i x_i - \hat{\alpha}\sum x_i - \hat{\beta}\sum x_i^2 = 0 \ \ldots (2)$$

بتعويض قيمة $\hat{\alpha}$ في المعادلة (2) نجد:

$$\sum x_i y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}\bar{x})\sum x_i - \hat{\beta}\sum x_i^2 = 0 \ \ldots (3)$$

لدينا: $\sum x_i = n\bar{x}$ إذن نعوض $\sum x_i$ بـ $n\bar{x}$ في المعادلة (3) نجد:

$$\sum x_i y_i - (\bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}) n\bar{x} - \hat{\beta}\sum x_i^2 = 0$$

$$\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} + n\hat{\beta}\bar{x}^2 - \hat{\beta}\sum x_i^2 = 0$$

$$\sum x_i y_i - n\bar{x}y = \hat{\beta}(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$ (02)

8/ تحقق استخدام الأخطاء المعيارية لمعرفة هل المعلمات مقبولة احصائيا أم لا، بحيث نقارن هذه الانحرافات (الأخطاء المعيارية) مع القيم العددية لمقدرات معلمات المربعات الصغرى العادية $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ فإذا كانت الأخطاء المعيارية أقل من نصف القيمة العددية لمقدرات المعالم $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ مثلا: $\left[SE(\hat{\alpha}) < \frac{\hat{\alpha}}{2}\right]$ نستنتج بأن تلك المقدرة مقبولة احصائيا. وهذا معناه رفض الفرضية العدمية القائلة بأن $\alpha = 0$ أو $(\beta = 0)$ أما إذا كانت الأخطاء المعيارية أكبر من نصف المقدرة، فنقول بأن تلك المقدرة بأنها غير معنوية احصائيا. (1.5)

حل التمرين الثاني:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

تقدير معلمات النموذج:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{2i}X_{3i} & \sum X_{3i}^2 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \\ \sum X_{3i}Y_i \end{pmatrix}$$ (01)

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 10 & 60 & 8000 \\ 60 & 390 & 42100 \\ 8000 & 42100 & 7980000 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} 800 \\ 4500 \\ 705000 \end{pmatrix}$$ (01)

لدينا: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$.

حساب أولا محدد المصفوفة $(X'X)$

$$\det(X'X) = 10\begin{vmatrix} 390 & 42100 \\ 42100 & 7980000 \end{vmatrix} - 60\begin{vmatrix} 60 & 42100 \\ 8000 & 7980000 \end{vmatrix} + 8000\begin{vmatrix} 60 & 390 \\ 8000 & 42100 \end{vmatrix} = 125900000.$$ (01)

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{125900000}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}390 & 42100\\ 42100 & 7980000\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}60 & 42100\\ 8000 & 7980000\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}60 & 390\\ 8000 & 42100\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}60 & 8000\\ 42100 & 7980000\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}10 & 8000\\ 8000 & 7980000\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}10 & 60\\ 8000 & 42100\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}60 & 8000\\ 390 & 42100\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}10 & 8000\\ 60 & 42100\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}10 & 60\\ 60 & 390\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$ 01

$$= \frac{1}{125900000}\begin{pmatrix} 1339790000 & -142000000 & -594000 \\ -142000000 & 15800000 & 59000 \\ -594000 & 59000 & 300 \end{pmatrix}$$ 01

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) = \frac{1}{125900000}\begin{pmatrix} 1339790000 & -142000000 & -594000 \\ -142000000 & 15800000 & 59000 \\ -594000 & 59000 & 300 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 800\ldots \\ 450\ldots \\ 70500\ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 111,691 \\ -7,188 \\ 0,014 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 111,691 \\ -7,188 \\ 0,014 \end{pmatrix}$$ 01

ومنه النموذج المقدر هو

$$\boxed{\hat{Y}_i = 111,691 - 7,188\, x_{2i} + 0,014\, x_{3i}}$$ 01

التفسير:

* تبين نتائج التقدير وجود علاقة عكسية بين سعر السلعة (X_{1i}) والكمية المطلوبة منها (Y_i) بحيث زيادة X_{1i} بوحدة واحدة تؤدي الى نقص Y_i بـ 7,18 وحدة، كما تشير النتائج أيضا الى وجود علاقة طردية بين دخل المستهلك (X_{2i}) والكمية المطلوبة (Y_i) بحيث تؤدي زيادة الدخل بوحدة واحدة الى زيادة الكمية المطلوبة بـ 0,014 وحدة. مع ثبات أسعار (X_{1i}). 0.5

2/ إيجاد تباين المعلمات المقدرة:

$$V(\hat{\beta}) = \hat{S}_m^2 (X'X)^{-1}.$$

إيجاد قيمة تباين الخطأ $\hat{S}_m^2$:

$$\hat{S}_m^2 = \frac{\sum \hat{m}_i^2}{n-k} \qquad k=3 \quad , \quad n=10$$

$$\sum \hat{m}_i^2 = \left(\sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2\right) - \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

$$TSS = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$

$$= 67450 - (10)\left(\frac{800}{10}\right)^2 =$$

$$= 67450 - 10\,(80)^2$$

$$= 3450$$

$$\boxed{TSS = 3450}$$ 0.5

$$ESS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = 2912.$$

$$\sum \hat{m}_i^2 = TSS - ESS$$

$$= 4350 - 2912$$

$$= 538$$

$$\boxed{\sum \hat{m}_i = 538}$$ 0.5

$$\hat{S}_m^2 = \frac{\sum \hat{m}_i^2}{10-3} = \frac{538}{7} = 76,857.$$

$$\boxed{\hat{S}_m^2 = 76,857}$$ 0.5

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \frac{76{,}857}{125900000}\begin{pmatrix} 1339790000 & & \\ & 15800000 & \\ & & 300 \end{pmatrix}$$ 01

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{76{,}857}{125900000}(1339790000) = 817{,}889$$ 0,5

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{76{,}857}{125900000}(15800000) = 9{,}648$$ 0,5

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_3) = \frac{76{,}857}{125900000}(300) = 0{,}00018$$ 0,5

- إيجاد معامل التحديد R^2:

$$R^2 = \frac{\Sigma(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\Sigma Y_i^2 - n\bar{Y}^2} = \frac{ESS}{TSS} = \frac{2912}{3450} = 0{,}844$$

$$\boxed{R^2 = 0{,}844}$$ 01

التفسير:

نستنتج من قيمة $R^2 = 0{,}844$ أن $84{,}4\%$ من تغيرات المتغير
التابع (الكمية المطلوبة من السلعة) مفسرة بواسطة تغيرات
المتغيرات المستقلة (سعر السلعة، ودخل المستهلك)
والباقي $15{,}6\%$ تفسر بعوامل أخرى لم تدرج في النموذج.

01