

الحل النموذجي

نص التمرين 01 ن06

تحاول إحدى المؤسسات إنتاج أكبر عدد من المنتجين (02): مياه معدنية وعصائر، وذلك في ظل القيود الإنتاجية والطاقة التمويلية، والجدول التالي يوضح البيانات الخاصة بالمنتجين:

المنتجات	سعر بيع الوحدة	تكلفة الوحدة	عدد الساعات المطلوبة لإنتاج الوحدة الواحدة		
			القسم أ	القسم ب	القسم ج
المياه المعدنية	15	12	0.4	0.5	0.3
العصائر	10	9	0.3	0.4	0.2
الطاقة المتاحة	/	/	300	400	250

حيث أن المؤسسة تتوفر على مبلغ 20000 دج، وتتم عملية التخزين في مخن طاقته الاستيعابية 200 وحدة، حيث أن الحجم التخزيني للعصائر ضعف المياه المعدنية.

المطلوب: قم ببناء النموذج الرياضي لهذه المسألة؟

الحل

1- تعريف متغيرات النموذج:

X_1 : عدد الوحدات المنتجة من المياه المعدنية

والتي تحقق اعظم ربح؛

X_2 : عدد الوحدات المنتجة من العصائر والتي

تحقق اعظم ربح -

2- تحديد دالة الهدف:

الربح: المياه المعدنية: 15-12-3=

العصائر: 10-9-1=

$$Maxz = 3x_1 + 1x_2$$

3- تحديد القيود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{القسم الأول} \quad 0.4x_1 + 0.3x_2 \leq 300 \\ \text{القسم الثاني} \quad 0.5x_1 + 0.4x_2 \leq 400 \\ \text{القسم الثالث} \quad 0.3x_1 + 0.2x_2 \leq 250 \\ \text{المبلغ المتاح} \quad 12x_1 + 9x_2 \leq 20000 \\ \text{التخزين} \quad 1x_1 + 2x_2 \leq 200 \end{array} \right.$$

4- شرط عدم السلبية:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ينتج أحد المصانع نوعين من الخزانات، على مرحلتين حيث يستغرق الأول 5 ساعات في المرحلة الأولى و3 ساعات في المرحلة الثانية، بينما يستغرق النوع الثاني ساعتين في المرحلة الأولى و3 ساعات في المرحلة الثانية. مع العلم أن ساعات العمل القصوى 30 و21 ساعة في المرحلتين على التوالي، والربح في الخزائين 4 و3 دج على التوالي (بالآلاف).

المطلوب: قم ببناء النموذج الرياضي لهذه المسألة، ثم قم بحله بيانياً؟

الحل

لحل النموذج الرياضي باستخدام الطريقة البيانية:

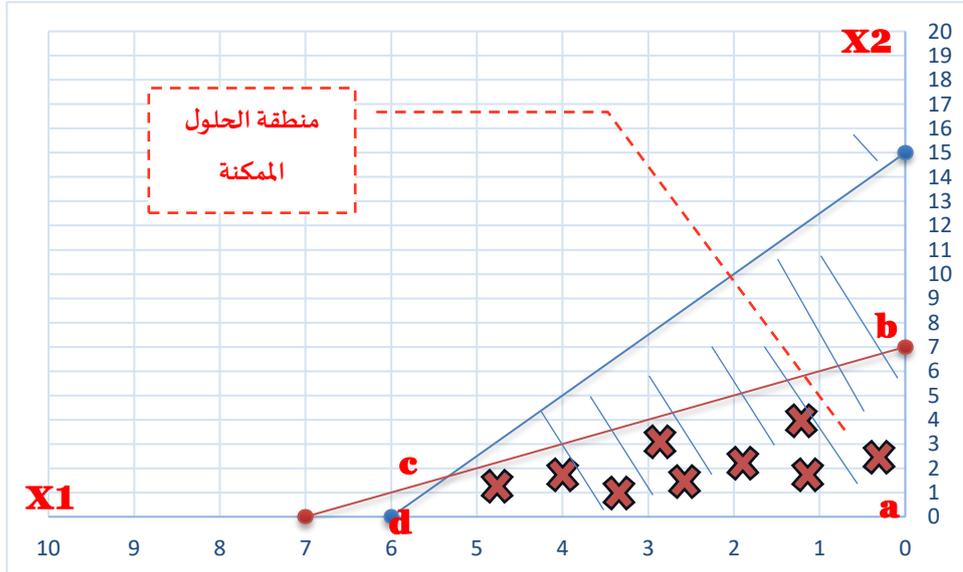
-1 تحويل القيود الى معادلات، أي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 30 \dots\dots\dots 1 \\ 3x_1 + 3x_2 = 21 \dots\dots\dots 2 \end{cases}$$

-2 نستنتج قيم x_1, x_2 على محوري الفواصل والترتيب، أي:

01	x_1	0	6	02	x_1	0	7
	x_2	15	0		x_2	7	0

-3 نرسم المستقيمين تبعا لقيم x_1, x_2 ، أي:



بعد رسم المستقيمين 01 و02، نحدد مجال الحل لهما والنقاط المشتركة، ومنه فنقاط هذه المنطقة (A,B,C,D) هي التي تسمح لنا بتحديد الحل الأمثل وهو النقطة C لأنها نقطة تقاطع المنحنيين، وللتأكد نعوض في النموذج الخطي، حيث:

$$\begin{cases} A(0,0) \Rightarrow Maxz = 4(0) + 3(0) = 0 \\ B(0,7) \Rightarrow Maxz = 4(0) + 3(7) = 21 \\ C(5,2) \Rightarrow Maxz = 4(5) + 3(2) = 26 \\ D(6,0) \Rightarrow Maxz = 4(6) + 3(0) = 24 \end{cases}$$

نلاحظ أنه عند النقطة c تحقق الحل الأمثل، أي أنه يجب إنتاج 5 وحدة من X1 و2 من X2 من أجل تحقيق أكبر ربح والمقدرب 26 وحدة نقدية.

لتسهيل عملية الحل نضع معطيات المشكلة في شكل جدول، كما يلي:

الربح	مرحلة 02	مرحلة 01	الخزائنة
4	3	5	A
3	3	2	B
/	21	30	الطاقة التشغيلية

-1 تعريف متغيرات النموذج:

x_1 : عدد الوحدات المنتجة من A؛

x_2 : عدد الوحدات المنتجة من B.

-2 تحديد دالة الهدف:

$$Maxz = 4x_1 + 3x_2$$

-3 تحديد القيود:

$$\begin{cases} \text{المرحلة 01: } 5x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ \text{المرحلة 02: } 3x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases}$$

-4 شرط عدم السلبية:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ليكن لدينا المباراة التالية:

		استراتيجية اللاعب "B"		
		-	B ₁	B ₂
استراتيجية اللاعب "A"	-	P	Y ₁	Y ₂
	A ₁	X ₁	6	4
	A ₂	X ₂	4.5	5

المطلوب:

- حدد إذا ما كانت المباراة مستقرة ولها نقطة توازن؟
- إذا لم تكن المباراة مستقرة، أوجد الحل الأمثل لتحديد قيمة المباراة؟

الحل

حسب الجدول فان:

$$Max(min) \neq Min(max) \Rightarrow 4.5 \neq 5$$

المباراة غير مستقرة وليس لها نقطة توازن

الخسارة المتوقعة بالنسبة للاعب الثاني:

$$P = Y_1 + Y_2 = 1$$

$$6Y_1 + 4Y_2 = 6Y_1 + 4(1 - Y_1) = 2Y_1 + 4$$

$$4.5Y_1 + 5Y_2 = 4.5Y_1 + 5(1 - Y_1) = 5 - 0.5Y_1$$

بالمساواة، نجد:

$$2Y_1 + 4 = 5 - 0.5Y_1$$

أي:

$$Y_1 = 1/2.5, Y_2 = 1.5/2.5$$

أي أنه على اللاعب الأول اتباع الاستراتيجية
المختلطة (1/2.5, 1.5/2.5)

من أجل إيجاد قيمة المباراة نعوض في أحد
المعادلتين، نجد:

$$5 - 0.5Y_1 = 5 - 0.2 = 4.8 \text{ (الخسارة)}$$

العائد المتوقع بالنسبة للاعب الأول:

$$P = X_1 + X_2 = 1$$

$$6X_1 + 4.5X_2 = 6X_1 + 4.5(1 - X_1) = 1.5X_1 + 4.5$$

$$4X_1 + 5X_2 = 4X_1 + 5(1 - X_1) = 5 - 1X_1$$

بالمساواة، نجد:

$$1.5X_1 + 4.5 = 5 - 1X_1$$

أي:

$$X_1 = 0.5/2.5, X_2 = 2/2.5$$

أي أنه على اللاعب الأول اتباع الاستراتيجية
المختلطة (0.5/2.5, 2/2.5)

من أجل إيجاد قيمة المباراة نعوض في أحد
المعادلتين، نجد:

$$1.5X_1 + 4.5 = 0.3 + 4.5 = 4.8 \text{ (العائد)}$$