الحل النموذجي
لإمتحان الإحصاء 04

التمرين 01 :

1. احتمال أن يتجاوز مجموع أطوالهن 102 متر

$$p(\Sigma x_i > 10200) = p\left(\frac{\Sigma x_i}{n} > \frac{10200}{64}\right) = p(\bar{x} > 159{,}375)$$

(0,5) (0,5)

بما أن $n_x > 30$ $\Leftarrow$ $Z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\delta_x/\sqrt{n_x}} \sim N(0,1)$ (0,5)

$$\Rightarrow p\left(\frac{\bar{x} - \mu_x}{\delta_x/\sqrt{n_x}} > \frac{159{,}375 - 159}{6/\sqrt{64}}\right) = p(Z > 0{,}5) =$$

(0,5) (0,5)

$$1 - p(Z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}69 = 0{,}31$$

العدد الأدنى للطلبة الذكور ؛

$$p(\bar{y} < 175) = 0{,}95$$

نحن نعلم أن $Y \sim N(170; 8)$

$$\Rightarrow Z = \frac{\bar{y} - \mu_y}{\delta_y/\sqrt{n_y}} \sim N(0,1)$$ (0,5)

$$\Rightarrow p\left(\frac{\bar{y} - \mu_y}{\delta_y/\sqrt{n_y}} < \frac{175 - 170}{8/\sqrt{n_y}}\right) = 0{,}95$$ (0,5)

$$\Rightarrow p\left(Z < \frac{5}{8/\sqrt{n_y}}\right) = 0{,}95$$ (0,5)

القيمة الجدولية المقابلة للإحتمال 0,95 هي : 1,645

ومنه $\frac{5}{8/\sqrt{n_y}} = 1{,}645$ (0,5)

$$\Rightarrow \boxed{n_y \simeq 7}$$

احتمال أن يزيد متوسط طول الطالبة الذكور بأكثر من 12 سم:

$$p(\bar{Y} - \bar{X} > 12)$$ (0,5)

بما أن $n_x > 30$ و $n_y > 30$ يمكن الاستفادة من نظرية النهاية المركزية: (1)

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_y - \mu_x)}{\sqrt{\frac{\delta_x^2}{n_x} + \frac{\delta_y^2}{n_y}}} \sim N(0,1)$$

ومنه (0,5)

$$p\left(\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_y - \mu_x)}{\sqrt{\frac{\delta_y^2}{n_y} + \frac{\delta_x^2}{n_x}}} > \frac{12 - (170 - 159)}{\sqrt{\frac{64}{49} + \frac{36}{36}}} \right) =$$

$$p\left(Z > \frac{12 - 11}{1,51} \right) = p(Z > 0,67) = 1 - p(Z \leq 0,67)$$ (0,5)

$$= 1 - 0,7486 = 0,2514$$ (0,5)

تمرين 02:

مجال الثقة لمتوسط علامات الطلبة عند 95%:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i . n_i}{\sum n_i} = \frac{786}{80} = 9,825$$ (0,5) (0,5)

$$\tilde{s}^2 = \frac{\sum n_i . (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i - 1} = \frac{379,0405}{79} = 4,7$$ (0,5) (0,5)

$$\Rightarrow \tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2} = \sqrt{4,8} = 2,19$$ (0,5) 4,8

بما أن $n > 30$ فيمكن الاستفادة من نظرية النهاية المركزية:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\tilde{S}/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$ (0.5)

وعند مستوى الثقة 95٪ فإن حدود الثقة هي $\mp 1,96$

ومنه: (0.5)

$$\mu \in \left[\bar{x} - \frac{Z}{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + \frac{Z}{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}\right]$$ (0.5)

$$\mu \in \left[9,825 - 1,96 \cdot \frac{2,19}{\sqrt{80}} \; ; \; 9,825 + 1,96 \cdot \frac{2,19}{\sqrt{80}}\right]$$ (0.5)

$$\Rightarrow \mu \in [9,345 \; ; \; 10,305]$$ (0.5)

2. مجال الثقة لتباين المجتمع عند 95٪:

$$\delta^2 \in \left[\frac{(n-1)\cdot \tilde{S}^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}} \; ; \; \frac{(n-1)\cdot \tilde{S}^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}\right]$$ (0.5)

$$\Rightarrow \delta^2 \in \left[\frac{79 \times 4,8}{106,63} \; ; \; \frac{79 \times 4,8}{57,15}\right]$$ (0.5)

$$\Rightarrow \delta^2 \in [3,55 \; ; \; 6,63]$$ (0.5)

3. مجال الثقة عند مستوى الثقة 99٪:

لابد من التأكد من طبيعة السحب:

$$\frac{n}{N} = \frac{80}{400} = 0,2 > 0,05$$ (0.5)

وبالتالي يمكن اعتبار السحب بدون إرجاع (نفاذي)

الصفحة 03

$$\mu \in \left[\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \; ; \; \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right]$$ (0,5)

$$\mu \in \left[9,825 - 2,58 \cdot \frac{2,19}{\sqrt{80}} \cdot \sqrt{\frac{400-80}{400-1}} \; ; \; 9,825 + 2,58 \cdot \frac{2,19}{\sqrt{80}} \cdot \sqrt{\frac{400-80}{400-1}} \right]$$ (0,5)

$$\mu \in [9,33 \; ; \; 10,32]$$ (0,5)

التمرين 03:

صياغة الفرضيات: (0,5)

$$\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P < P_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : P = 0,8 \\ H_1 : P < 0,8 \end{cases}$$ اختبار أحادي

الاتجاه من اليسار

حصائية الاختبار: (0,5)

$$Z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\hat{P} = \frac{x}{n} = \frac{56}{64} = 0,875$$ (0,5)

ومنه

$$Z_c = \frac{0,875 - 0,8}{\sqrt{\frac{0,8(0,2)}{64}}} = 1,5$$ (0,5)

عند 5٪:

القيمة المجدولة: $Z_t = -1,645$ (0,5)

القرار: $Z_c > Z_t \Rightarrow$ قبول الفرضية الصفرية H_0 (0,5)

وبالتالي الادعاء صحيح (0,5)

عند 1٪: القيمة المجدولة $Z_t = -2,33$

$Z_c > Z_t \Rightarrow$ قبول الفرضية الصفرية (0,5)

يعني الادعاء صحيح.